*

En intepretasjon av egenskapsteorien E;4

*

Morten Rognes

1986

*

§1

Egenskapsteorien E;4 ble beskrevet og definert i §17 i Rognes [4]. Språket til E;4 er det samme som språket til de andre egenskapsteoriene E;1, E;2 og E;3 som ble definert i Rognes [4], nemlig L;e[Δ]. Man får E;4 ved å sløyfe urmengdeaksiomet i E;3 og istedet erstatte dette med det følgende ikke-logiske aksiom:

E8 $(Ax)(At;1(x) \rightarrow x \hat{e} Ur)$

Som man ser sier dette aksiomet at alle monadiske egenskaper er urindivider, dvs. ikke-mengder.

I dette notatet vil vi presentere en intepretasjon av E;4 inn i systemet ZFC;u–(L;(e,c)) + Ur7 som ble definert i Rognes [3]. Språket til teorien ZFC;u–(L;(e,c)) + Ur7 er L;e utvidet med det binære predikatet "F;0(x,y)" som tentativt kan leses "y er det urindividet som en-entydig er korrelert med mengden x". Aksiomene i systemet er de i ZFC;u(L;(e,c)) minus urmengdeaksiomet, men med Ur7 føyet til som nytt ikke-logisk aksiom. Angående systemet ZFC;u(L;e) bør man konsultere Rognes [1] og Rognes [2]. I Rognes [2] vises en rekke konsistensresultater for systemet ZFC;u(L;e) når dette utvides med forskjellige aksiomer om urindivider.

La oss nå presentere den intepretasjonen av E;4 inn i teorien ZFC;u–(L;(e,c)) + Ur7 som vi har i tankene.

Vi betrakter en funksjon ß som avbilder Fm(L;e[Δ]) inn i Fm(L;(e,c)). Denne funksjonen er definert induktivt på lengden av formler i L;e[Δ] på den følgende måte:

(i) $ß(PaQ) = ß(P)aß(Q)$ om a enten er v, &, –> eller <–>
(ii) $ß(\neg P) = \neg ß(P)$
(iii) $ß((Dx)P) = (Dx)ß(P)$ om D enten er A eller E
(iv) $ß(M(x)) = M(x)$
(v) $ß(x \hat{e} y) = (x \hat{e} y)$
(vi) $ß(x=y) = (x=y)$

Mao. er ß det som vi tidligere har omtalt som en intepretasjon som er normal med hensyn på de logiske og mengdeteoretiske konstruksjonene. I tillegg til kravene (i) – (vi) krever vi:

(vii) $ß(MV(x)) = (x \hat{e} N)$
(viii) $ß(Ut(x)) = (x \hat{e} Pt(N))$
(ix) $ß(True(w,x)) = (w \hat{e} N \ \& \ x \hat{e} Pt(N) \ \& \ w \hat{e} x)$
(x) $ß(At;y(x)) = (y \hat{e} N \ \& \ (Ez)(M(z) \ \& \ (Ef)(f: N \rightarrow Pt(z \hat{} y) \ \& \ F;0(f,x)) \ \& \ y \geq 1)$
(xi) $ß(H(x,y,w)) = (w \hat{e} N \ \& \ (Ez)(M(z) \ \& \ (Ef)(f: N \rightarrow Pt(z) \ \& \ F;0(f,y))) \ \& \ (Af)(M(f) \ \& \ F;0(f,y) \rightarrow x \hat{e} f(w)))$

(xii) $ß(MI(x)) = (x=x)$

Dette avslutter vår definisjon av avbildningen ß. ß er den intepretasjonen som vi altså ønsket å spesifisere i dette notat.

§2

Det man nå kan vise, men som ikke vil bli gjort detaljert her, er at ß avbilder alle teoremene i E;4 på teoremer i ZFC;u–(L;(e,c)) + Ur7 og på en slik måte at en formel av typen P&¬P avbildes på en formel av samme type i L;(e,c). Dette innebærer at systemet E;4 er konsistent, dvs. at ingen formel av typen P&¬P er bevisbar i E;4, dersom ZFC;u–(L;(e,c)) + Ur7 er konsistent. Mao. har vi at E;4 er konsistent relativt til ZFC;u–(L;(e,c)) + Ur7. Siden det sistnevnte system ble vist å være konsistent relativt til ZFC+I, dvs. ZFC utvidet med det aksiom som sier at det finnes utilgjengelige kardinaltall, (Se Rognes [2]) følger det at E;4 også er konsistent relativt til ZFC+I. Siden ingen av de matematikere og logikere vi kjenner til som har arbeidet med ZFC har ytret alvorlig tvil om at systemet ZFC+I er konsistent, synes dette å gi en et visst grunnlag for å hevde at E;4 også er et system som er fritt for motsigelser.

***

Referanser

Referanser

Rognes [1], Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2], Rognes, Morten, *ZFC og eksistensen av urindivider. Noen konsistensresultater.* Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [3], Rognes, Morten, *Noen betraktninger over urindivider i Zermelo-Fraenkel mengdelære.* Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [4], Rognes, Morten, *Egenskaper. Del I* Maskinskrevet manuskript, 1985
Takeuti [1], G. Takeuti and W.M. Zaring, "Introduction to Axiomatic Set Theory", Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.

***